Università

Manuali

Rita Vincenti

LEZIONI DI GEOMETRIA
AFFINE ED EUCLIDEA DEL PIANO
E DELLO SPAZIO *3*-DIMENSIONALE REALE

Morlacchi Editore U.P.

Cover: *The Klein Quadric xy+zt+uv=0 of PG(5,q)*, image courtesy M.V.Barbarossa, A.O.Duliu, adapted for the Bachelor thesis of M.V. Barbarossa "*Codes from projective subsystems of the Klein quadric of PG(5,q)*", Università degli Studi di Perugia (2006).

isbn 978-88-9392-025-4

www.morlacchilibri.com – redazione@morlacchilibri.com
Stampato da Digital Print srl – Segrate (Milano)

Indice

SEZIONE I

SEZIONE II

Presentazione

Gli appunti che formano questo libro, organizzati in due sezioni (I e II), sono stati redatti per affiancare e sostenere le lezioni di Geometria del 1° semestre per studenti di Matematica e di Fisica, per supplire ed integrare il libro di testo scelto (cfr. [1] *A. Basile* e successive ristampe) come riferimento principale. Tale testo, a mio avviso, rappresenta una ottima base di studio dell'algebra lineare per studenti di primo anno di un corso di indirizzo scientifico e un sommario delle più rilevanti questioni della geometria. Altri testi sono indicati in bibliografia sia per quanto attiene l'algebra lineare, sia per quanto riguarda una visione più algebrica della geometria affine ed euclidea.
L'algebra lineare (spazi vettoriali, matrici, determinanti, applicazioni lineari, sistemi lineari) è prerequisito sostanziale e fondamentale per questi appunti.
Il libro si articola nel modo seguente:

Sezione I

1 - Introduzione alla geometria affine.
2 - Il piano affine reale.
3 - Lo spazio affine 3-dimensionale reale.

Sezione II

1 - Spazi vettoriali Euclidei
2 - Il piano affine Euclideo
Appendice – Le coniche
3 - Lo spazio affine Euclideo *3*-dimensionale
Appendice – La sfera

Gli esercizi contenuti nella pubblicazione *Esercizi di Geometria affine ed Euclidea* (di cui alcuni svolti) raccolti lungo gli anni, integrano e completano la teoria esposta nel libro.

Rita Vincenti

SEZIONE I

1 Introduzione alla geometria affine

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sopra il campo $\mathbf{K}$.

Per ogni vettore $a \in \mathbf{V}$ si definisce *traslazione* di $\mathbf{V}$ la applicazione $\tau_a : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definita da $\tau_a(v) = v + a$.

Sia $\mathbf{T} = \{\tau_a | a \in \mathbf{V}\}$ l'insieme delle traslazioni di $\mathbf{V}$. E' facile provare che $(\mathbf{T}, \circ)$ è un gruppo commutativo secondo la operazione binaria " $\circ$ " di *composizione* $\tau_a \circ \tau_a(v) = \tau_a(\tau_b(v)) = v + a + b = \tau_{a+b}$ con elemento neutro τ_0 ed inverso di τ_a definito da τ_{-a}.

Proprietà di rilievo del gruppo $(T, \circ)$ sono:

1) per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbf{V}$ esiste una unica $\tau_x \in \mathbf{T}$ tale che $\tau_x(u) = v$ (essendo $(\mathbf{V}, +)$ gruppo);

2) non esiste nessun $v \in \mathbf{V}$ tale che $\tau_a(v) = v$ se $a \neq 0$ (ovvero, una traslazione $\tau_a \neq \tau_0$ non ha *punti fissi*).

Per queste due prime proprietà si dice che $\mathbf{T}$ *agisce regolarmente* su $\mathbf{V}$.

3) il gruppo $(\mathbf{T}, \circ)$ è isomorfo a $(\mathbf{V}, +)$ (è sufficiente considerare la applicazione $\phi : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ definita da $\phi(\tau_u) = u$ per ogni $\tau(u) \in \mathbf{T}$).

Sia $\mathbf{S} < \mathbf{V}$ un sottospazio di $\mathbf{V}$.

Per ogni $a \in \mathbf{V}$ si definisce $a + \mathbf{S} = \{a + s | s \in \mathbf{S}\}$ *laterale (classe) rispetto al (o modulo il) sottospazio* $\boldsymbol{S}$. Per quanto sopra definito, un laterale rispetto al sottospazio $\mathbf{S}$ è quindi un *traslato* di $\mathbf{S}$.

Si definisca una relazione " $\sim$ " su $\mathbf{V}$ per ogni $a, b \in \mathbf{V}$ nel modo seguente :

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad b \in a + \mathbf{S}.$$

Si noti che $a + \mathbf{S}$ è sottospazio solo nel caso in cui $a = 0$.

Denotiamo $\mathcal{P} = \{a + \mathbf{S} |\, a \in \mathbf{V}\}$ l'insieme di tutti i laterali modulo $\mathbf{S}$.

Valgono le seguenti proprietà:

p_1) $a + \boldsymbol{S} = b + \boldsymbol{S} \Leftrightarrow a - b \in \boldsymbol{S}$

p_2) $a + \boldsymbol{S}$ *e* $b + \boldsymbol{S}$ *coincidono o sono disgiunti*

p_3) $\mathcal{P}$ *è una partizione di* $\boldsymbol{V}$.

Dimostrazione.

p_1) Da $a + \mathbf{S} = b + \mathbf{S}$ segue che per ogni $s \in \mathbf{S}$ esiste $s' \in \mathbf{S}$ tale che $a + s = b + s'$, equivalente alla $a - b = s' - s$ ovvero $a - b \in \mathbf{S}$.
Da $a - b \in \mathbf{S}$ segue $a - b = s$ per $s \in \mathbf{S}$, equivalente alla $a = b + s$ quindi $a + \mathbf{S} = b + s + \mathbf{S}$ ovvero $a + \mathbf{S} = b + \mathbf{S}$.

p_2) Sia $c \in a + \mathbf{S} \cap b + \mathbf{S}$. Allora esistono $s, s' \in \mathbf{S}$ tali che $c = a + s = b + s'$, da cui segue $a = b + s' - s$ quindi $a + S = b + s' - s + \mathbf{S} = b + \mathbf{S}$.

p_3) Per ogni $g \in \mathbf{V}$ e un elemento $s \in \mathbf{S}$ esiste $x \in \mathbf{V}$ tale che vale $g = x + s$ (per l'assioma dei quozienti valido in un gruppo), da cui $g \in x + \mathbf{S}$. Quindi $\mathcal{P}$ è un *ricoprimento*.

Aggiungendo la proprietà p_2 si ha l'asserto (ovvero, si noti che per un'altra scelta $s' \in \mathbf{S}$, esiste $x' \in \mathbf{V}$ tale che vale $g = x' + s'$, ovvero $g = x + s = x' + s'$ da cui segue $x' = x + s - s'$. Si deduce $x' + S = x + s - s' + \mathbf{S} = x + \mathbf{S}$). $\square$

Notare che due laterali $a + \mathbf{S}$ e $b + \mathbf{S}$ sono equipotenti. E' sufficiente definire una relazione $\phi : a + \mathbf{S} \to b + \mathbf{S}$ che si dimostri essere biiettiva. Sia $\phi(a + s) = b + s$: ϕ è suriettiva poiché per ogni elemento $b + s \in b + \mathbf{S}$ esiste $a + s \in a + \mathbf{S}$ tale che $\phi(a + s) = b + s$.

Inoltre da $\phi(a + s) = \phi(a + s')$ segue $b + s = b + s'$ equivalente a $s = s'$ da cui segue $a + s = a + s'$, cioè ϕ è anche iniettiva.

Per risalire alla relazione di equivalenza definita da una partizione, si noti che, in questo caso, due elementi $v, v' \in \mathbf{S}$ appartengono ad una stessa classe (laterale), ovvero $v, v' \in a + \mathbf{S}$, precisamente quando $v = a + s \wedge v' = a + s'$ da cui $v' - v =$

$(a + s') - (a + s) = s' - s$ cioè precisamente quando $v' - v \in \mathbf{S}$, ovvero $v' \in v + \mathbf{S}$ quindi la relazione è la seguente:

$$vRv' \Leftrightarrow v' \in v + \mathbf{S},$$

che è proprio quella da cui si era partiti.

Per ogni scelta di $\mathbf{S} < \mathbf{V}$ si collezionino tutti i laterali $a + \mathbf{S}$ per ogni $a \in \mathbf{V}$ e si consideri l'insieme

$$\mathcal{L} = \{a + \mathbf{S} | a \in \mathbf{V}, \mathbf{S} < \mathbf{V}\}.$$

Per ogni scelta del sottospazio $\mathbf{S}$ (e quindi della partizione $\{a + \mathbf{S} | a \in \mathbf{V}\}$), $\mathbf{S}$ è denominato *sottospazio direttore.*

Si noti che ogni laterale $a + \mathbf{S}$ può considerarsi il trasformato $\tau_a(\mathbf{S})$ del sottospazio $\mathbf{S}$ sotto l'azione della traslazione $\tau_a \in \mathbf{T}$.

Se la dimensione di $\mathbf{V}$ è *dim*=*n*, si può ripartire l'insieme $\mathcal{L}$ a seconda della dimensione di $\mathbf{S} < \mathbf{V}$, iniziando dalla dimensione 0 (relativa alla scelta $\mathbf{S} = \{\mathbf{0}\}$, sottospazio nullo) fino alla dimensione $n - 1$ (relativa alla scelta $\mathbf{S}$ iperpiano di $\mathbf{V}$) nel seguente modo:

$\mathcal{P} = \{a | a \in \mathbf{V}\}$,
$\mathcal{R} = \{a+ < m > | a \in \mathbf{V}, m \in \mathbf{V}^* = \mathbf{V} \setminus \{0\}\}$,
$\Pi = \{a+ < m, n > | a \in \mathbf{V}, m, n \in \mathbf{V}, dim < m, n >= 2\}$,
....
$\mathcal{H} = \{a+ < m_1, ..., m_{n-1} > | a \in \mathbf{V}, dim < m_1, ..., m_{n-1} >= n - 1\}$.

Sia $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \Pi, ...\mathcal{H}, I, //)$ ove si definisce $\mathcal{P}$ *insieme dei punti*, $\mathcal{R}$ *insieme delle rette*, Π *insieme dei piani*, ..., $\mathcal{H}$ *insieme degli iperpiani.* In generale, un laterale $A = a+ < m_1, ..., m_r >$ con $dim\ < m_1, ..., m_r >= r$ si definisce *sottospazio affine di dimensione* r (forzando un poco la notazione si indica $dim\, A = n$ intendendo *dimensione affine di* A) e il sottospazio $< m_1, ..., m_r >$ lo *spazio direttore di* A.

Inoltre I è la *relazione di incidenza* definita per ogni coppia di laterali (A, B) da AIB se $A \cap B \neq \emptyset$. Nel caso che A è un punto e B non lo è, se AIB si dice anche A *appartiene a* B.

$//$ è la *relazione di parallelismo* definita come segue:
per ogni $A, B \in \mathcal{R} \cup \Pi \cup ... \cup \mathcal{H}$, $A = a + \mathbf{S}, B = b + \mathbf{S'}$, $dim\mathbf{S} \leq dim\mathbf{S'}$ si ha $A //B$ se e solo se $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S'}$.

NOTA 1 - Siano $A = a + \mathbf{S}$, $B = b + \mathbf{S'}$. Se $\mathbf{S} = \mathbf{S'}$, allora $A //B$ precisamente quando A e B sono traslati di uno stesso sottospazio, quindi equivalente ad affermare $A = B$ oppure $A \cap B = \emptyset$ con $A \uplus B = a+ < b - a > +\mathbf{S}$ (laterale generato da $A \cup B$, ovvero, il piú piccolo laterale che contiene $A \cup B$).

Se **S** $\subset$ **S'**, il laterale $A' = b+$**S** è contenuto in $B = b+$**S'** ed è tale che A' ed A sono traslati di uno stesso sottospazio, quindi $A \cap A' = \emptyset$ con $A \uplus A' = a+ < b-a > +$**S** (laterale generato da $A \cup A'$).

Si conclude che $A \ // B$ se e solo se $A = B$ oppure, se il laterale B contiene un laterale A' con $dimA' = dimA$ tale che $A'//A$ (ovvero, se A contiene B' con $dimB' = dimB$ tale che $B' \ // \ B$).

NOTA 2 - I laterali A e B che non sono paralleli e per cui vale $A \cap B = \emptyset$ si dicono *sghembi.*

DEFINIZIONE 1 - $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \Pi, ...\mathcal{H}, I, //)$ *è la geometria affine n-dimensionale sopra il campo* $\boldsymbol{K}$.

Nel seguito si indicherà $\mathcal{A} = AG(n, \boldsymbol{K})$.

Sia fissata in **V** una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Si considerino i seguenti $n+1$ punti di $\mathcal{A}$: $E_i := e_i, i = 1, 2, ..., n$ e un ulteriore punto $O := o$.

L'insieme degli $(n+1)$ punti $\{O, E_i, i = 1, 2, ..., n\}$ viene definito un *riferimento affine per* $\mathcal{A}$. Non si perde generalitá se si sceglie $o = 0$.

Esprimendo ogni vettore $v \in$ **V** rispetto alla base $\mathcal{B}$ cosí che $v = x_1e_1+...+x_ne_n$ ove $x_i \in$ **K**, al punto $P := v$ si può associare univocamente la n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Le n-uple $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sono definite *coordinate cartesiane affini per la geometria* $\mathcal{A}$.

In $\mathcal{A}$ *valgono le seguenti proprietá*:

1) Due punti distinti definiscono una unica retta;

2) Esistono $n+1$ punti non appartenenti ad uno stesso iperpiano.

Dimostrazione.

1) Siano $P = p, Q = q$ due punti distinti di $\mathcal{A}$. Una generica retta di $\mathcal{A}$ è un laterale di tipo $r = a+ < m >$.

I punti P e Q appartengono ad r precisamente quando $p = a + \lambda m$ e $q = a + \mu m$, da cui si ha $(\mu - \lambda)m = q - p$. Poiché i punti P e Q sono distinti, $\mu - \lambda \neq 0$ per cui è $< m > = < q - p >$.

Da $p = a + \lambda m$ segue anche $a = p - \lambda m$ da cui si può esprimere $r = p+ < q - p >$.

Oppure, analogamente, si perviene alla $q+ < p - q >$. Ma si ha $p+ < q - p > = q+ < p - q >$, difatti $p + \alpha(q - p) = q + \beta(p - q)$ per $\beta = 1 - \alpha$. Quindi $r = p+ < q - p > = q+ < p - q >$ è la retta univocamente determinata.

2) Gli $(n+1)$ punti $\{O, E_i, i = 1, 2, ..., n\}$ non appartengono ad un iperpiano poiché $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base per $\mathbf{V}$ per cui $< e_1, ..., e_n >= \mathbf{V}$. ♠

Dalla equazione vettoriale alla rappresentazione cartesiana (equazioni affini) di un sottospazio affine e viceversa

Sia $H = v+ < m_1, ..., m_{n-1} >$ un iperpiano di $\mathcal{A}$. Sia $P := x$ un punto di $\mathcal{A}$ con $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ cosí che P si esprime $P = (x_1, ..., x_n)$.

Si ha $P\ I\ H$ se e solo se $x = v + \lambda_1 m_1 + ... + \lambda_{n-1}m_{n-1}$.

Questa relazione significa che gli n vettori $x - v, m_1, ..., m_{n-1}$ sono dipendenti e si rappresenta imponendo che sia nullo il determinante della matrice

$$M = (x - v\ m_1\ ...\ m_{n-1})^t,$$

matrice $n \times n$ che ha per righe le componenti dei vettori $x - v, m_1, ..., m_{n-1}$.

Espandendo quindi $det\ M = 0$ e raccogliendo i coefficienti di $x_1, ..., x_n$ si ottiene una equazione lineare del tipo

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n + h = 0$$

con $a_i, h \in \mathbf{K}$ e che viene chiamata *equazione cartesiana dell'iperpiano*.

Per ogni sottospazio affine $S = a+ < v_1, ..., v_s >$ di dimensione s si ha $P\ I\ S$ se e solo se $x = a + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s$, cioè se e solo se gli $s + 1$ vettori $x - a, v_1, ..., v_s$ sono dipendenti. Ciò equivale ad affermare che sono nulli tutti i minori di ordine massimo $s + 1$ della matrice $(s + 1) \times n$

$$(x - a\ v_1\ ...\ v_s)^t$$

che ha per colonne le componenti dei vettori $x - a, v_1, ..., v_s$.

Espandendo ed uguagliando a zero questi determinanti, si ottiene un sistema lineare di $n - s$ equazioni nelle n incognite $x_1, ..., x_n$, con rango della matrice incompleta pari ad $n - s$ e che rappresenta il sottospazio S in *coordinate cartesiane*. ♠

Viceversa - Sia H un sottospazio affine rappresentato mediante un sistema lineare Σ in m equazioni ed n incognite

$$AX = b.$$

Sia $\mathcal{S} = \{s|As = b\}$ l'insieme delle soluzioni di Σ. Indichiamo con Σ_0 il sistema lineare omogeneo associato a Σ ovvero il sistema

$$AX = 0.$$